16.3 Eigenschaften des Lebesgueintegrals - Aufgabe 4

Anna Loch
Zeki Aydin
Adina Pechert

Betrachten Sie die vermittels

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{k^2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad x \in [0,1]$$

gegebene Funktionenfolgen $\{f^{(k)}\}_{k=1,2,\ldots}$

i) Ermitteln Sie den punktweisen Grenzwert $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

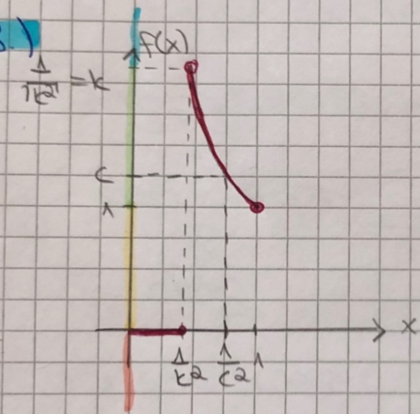
$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, \text{ da } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

Anwendbarkeit für Satz über monotone Konvergenz (vgl. Satz 16.3.2 Vorlesung)

1.) $f^{(k)}$ ist nichtnegativ auf $[0,1]$, da entweder $f^{(k)}(x) = 0$ oder $f^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ & $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ für $\frac{1}{k^2} < x \leq 1$ & $k = 1, 2, \ldots$

2.) $f^{(k)}$ ist monoton wachsend, da $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$ & $\frac{1}{\sqrt{x}}$ monoton fallend

3.)



① $c < 0 \rightsquigarrow \{x \in [0,1] \mid f(x) > c\} = [0,1]$

② $0 \leq c < 1 \rightsquigarrow \{x \in [0,1] \mid f(x) > c\} = [\frac{1}{k^2}, 1]$

③ $1 \leq c \leq k \rightsquigarrow \{x \in [0,1] \mid f(x) > c\} = [\frac{1}{k^2}, \frac{1}{c^2})$

④ $c \geq k \rightsquigarrow \{x \in [0,1] \mid f(x) > c\} = \emptyset$

$[0,1]$, $[\frac{1}{k^2}, 1]$, $[\frac{1}{k^2}, \frac{1}{c^2})$, $\emptyset$ sind L-mb

$\Rightarrow f^{(k)}$ ist L-mb für k beliebig $\Rightarrow$ alle $f^{(k)}$ L-mb

ii) $\int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda_1(x)$ ermitteln durch direktes Ausrechnen

$$\int_0^1 f(x)\, d\lambda_1(x) = \int_0^0 0\, d\lambda_1(x) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\lambda_1(x)$$

$$= [c]_0^0 + [2\sqrt{x}]_0^1$$

$$= 0 - 0 + 2$$

$$= 2$$

iii) $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f^{(k)}(x)\, d\lambda_n(x)$ ermitteln durch Auswerten des Grenzwertes.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f^{(k)}(x)\, d\lambda_n(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{k^2}} 0\, d\lambda_n(x) + \int_{\frac{1}{k^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\lambda_n(x) \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left([c]_0^{\frac{1}{k^2}} + [2 \cdot \sqrt{x}]_{\frac{1}{k^2}}^1 \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(c - c + 2 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k^2}} \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(2 - \frac{2}{k} \right)$$

$$= 2$$