Gruppe 2 - Abgabe 6

Juela Spahiu
Johanna Krömer
Kastriot Cekolli

Satz 16.4.3:

Auf der lebesguemessbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$ lebesgueintegrierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen:

i) $\forall \lambda > 0$ gilt $\ell_n^*(\Omega_\lambda) < \infty$ für die Menge $\Omega_\lambda := \{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$

ii) Die Funktion ist fast überall endlich.

Bew i) Laut VL 16.3.4: f $\mathcal{L}$-intbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ $\mathcal{L}$-intbar.
Ω ist Lebesguemessbar und für f gilt
f ist $\mathcal{L}$-intbar.

Betrachte nun äußeres Lebesguemaß $\forall x \in \Omega$ s.d für $\lambda > 0$ ist $|f(x)| > \lambda$

$$\Rightarrow \ell_n^*(\Omega_\lambda) = \ell_n^*(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\})$$

Wende Tschebyscheff - Ungleichung auf $|f|$ an

$$\leadsto \ell_n^*(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f(x)| \, d\ell_n(x) < \infty$$

Bew. ii)

fast überall endlich bedeutet $|f(x)| < \infty$ gilt $\forall x \in \Omega \setminus N$ mit einer Lebesgueschen Nullmenge $N \subset \Omega$

es gnügt die Behauptung für Lebesguemessbare Funktionen $f: \Omega \to [0, \infty]$

Punkte wo f endlich ist $\rightsquigarrow \{x \in \Omega : |f(x)| < \infty\}$

Punkte wo f unendlich ist $\rightsquigarrow \{x \in \Omega : |f(x)| = \infty\}$

$\Rightarrow$ f ist fast überall endlich

$\Leftrightarrow \Omega_\infty := \{x \in \Omega \mid |f(x)| = \infty\} = 0$ (ist eine Nullmenge)

$\Omega_\infty \subseteq \Omega_\lambda \quad \forall \lambda = 0$

$\rightsquigarrow 0 \leq \ell_n^*(\Omega_\infty) \leq \ell_n^*(\Omega_\lambda) \overset{\text{Tscheby.}}{\leq} \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_\Omega |f(x)| \, d\ell_n(x)}_{<\infty} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$

da $|f|$ L-intbar.

$\Rightarrow \ell_n^*(\Omega_\infty) = 0 \Rightarrow$ Beh ☐