Aufgabe 6 aus Kapitel 19.4

Abgabe von: Sebastian Neumann, Malte Pfalzgraf, Melanie Schäfer

Aufgabe 6

Auf $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, wie in 19.4.1 beschrieben, sei eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R})$ gegeben, und mit ihr betrachten wir den Flächengraphen $X(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^2$.

(i) z.z. $X(x,y)$ stellt eine Einbettung dar.

$\overset{19.4.2}{\Rightarrow}$ zeige 1) $X(x,y)$ ist eine Immersion

2) $X(x,y)$ ist injektiv.

Beweis zu 1)

Wie in 19.4.1 ist $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ stetig partiell diff'bar.

$\Rightarrow X \in \mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{Rang} \partial X = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} = 2,$$

[$f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ existieren, da $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R})$]

da die Tangentialvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x,y) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$

linear unabhängig sind. (egal, wie die Werte von f_x und f_y sind).

~~[illegible]~~ $\Rightarrow X(x,y)$ ist eine Immersion.

Beweis zu 2)

$X(x,y)$ ist injektiv $\Leftrightarrow X(x,y) = X(\tilde{x},\tilde{y}) \Rightarrow (x,y) = (\tilde{x},\tilde{y})$

$\Leftrightarrow (x,y) \neq (\tilde{x},\tilde{y}) \Rightarrow X(x,y) \neq X(\tilde{x},\tilde{y})$

für alle (x,y) & $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Sigma$

$\Leftrightarrow$ In Worten: Zwei unterschiedliche Elemente der Definitionsmenge Σ können nie auf dasselbe Element der Zielmenge abgebildet werden.

Beweis dazu

$X(x,y)$ ist injektiv, denn für alle $(x,y) \overset{\neq}{,} (\tilde{x},\tilde{y}) \in \Sigma$ mit $(x,y) \neq (\tilde{x},\tilde{y})$ stimmen die ersten beiden Komponenten von $X(x,y)=(x,y,f(x,y))$ und $X(\tilde{x},\tilde{y})=(\tilde{x},\tilde{y},f(\tilde{x},\tilde{y}))$ nie überein.

$$\Rightarrow X(x,y) \neq X(\tilde{x},\tilde{y}) \text{ für alle } \underset{\in \Sigma}{(x,y)} \neq \underset{\in \Sigma}{(\tilde{x},\tilde{y})}$$

$\Rightarrow X(x,y)$ ist injektiv.

1)+2)

$\Longrightarrow$ $X(x,y)$ stellt eine Einbettung dar.

(ii) Beispiel einer solchen Abbildung $X \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ vermöge $X(x,y) = (x, y, f(x,y))$,

wobei $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x,y) = x+y$

für alle $(x,y) \in \Sigma = [-5,5] \times [-5,5] \subset \mathbb{R}^2$

Skizze