Lea Reinheimer
Jessica Schilling
Florian Weinheimer

Übungsaufgabe zum Kapitel 19.3

19.3.7 Aufgabe 9

Formulieren und beweisen Sie den Satz aus Paragraph 19.3.4

Satz: Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset \Omega$ eine reguläre Kurve mit regulärer Parametrisierung $\gamma: [a,b] \to \Omega$. Ferner sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit dem Potential $\varphi \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_C \langle f(x), dx \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Beweis:

Wir berechnen:

$$\int_C \langle f(x), dx \rangle \overset{19.3.2}{=} \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Euklid-produkt

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \, \dot{\gamma}_i(t) \, dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\gamma(t))}{\partial x_i} \dot{\gamma}_i(t) \, dt$$

f(x) ist Gradientenfeld

Umkehrung der Kettenregel

Stammfunktion von $\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))$ ist $\varphi(\gamma(t))$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) \, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

d.h. $\int_C \langle f(x), dx \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$ $\square$