Abgabe von: Daniel Kuller, Matea Rokov 17.01.2021

Gruppe 3: Abgabe 2

Aufgabe 12 aus 19.3

12. Wir betrachten die Abbildung

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(i) Verifizieren Sie

$$\operatorname{div} f(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(ii) Verifizieren Sie, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_1} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(iii) Ermitteln Sie schließlich das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B} \langle f(x,y), d(x,y) \rangle$$

entlang des Randes ∂B der offenen Einheitskreisscheibe

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 < 1\}.$$

Ist die Abbildung wegunabhängig? Besitzt $f(x,y)$ ein Potential? Erklären Sie unter Benutzung von Resultaten aus dem Vorlesungstext.

(iv) Betrachte Sie nun die Grundmenge („geschlitzte Ebene")

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \leq 0, \; y = 0\}.$$

Begründen Sie mit Resultaten aus dem Vorlesungstext, dass $f(x,y)$ in Ω ein Potential besitzt.

(i) z.z. $\operatorname{div} f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}$$

$$= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2yx}{(x^2+y^2)}$$

$$= 0$$

(ii) $$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$$

(iii) $$\int_{\partial B} \langle f(x,y), d(x,y)\rangle = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt$$

mit der Parametrisierung $\gamma: [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ des Randes ∂B.

Wähle $\gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \partial B$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = \left(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}, \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\right) = (-\sin(t), \cos(t))$$

und $\dot\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\hookrightarrow \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin(t), \cos(t)), (-\sin(t), \cos(t))\rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dt$$

$$= 2\pi$$

Da das Kurvenintegral einer geschlossenen Kurve $\neq 0$ ist, ist es wegabhängig und damit existiert nach Satz aus 19.3.5 kein Potential.

(iv) f besitzt ein Potential auf Ω, denn:
Ω ist sternförmig (wähle einen Punkt auf der positiven x-Achse) & es gelten die Integrierbarkeitsbedingungen für Ω (siehe (ii)). Nach dem 2. Satz aus 19.2.3 gilt: $f(x,y)$ ist ein Gradientenfeld und besitzt auf Ω ein Potential.