14.2.5 Aufgabe 8) Christoffel, Seber, Mühlenbrock

zz: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abzählbar endlich oder abzählbar unendlich & beschränkt.

Dann entweder Ω nicht jordanmessbar, oder Ω jordansche Nullmenge

Beweis

I Ω endlich. Sei $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^2$.

Dann $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \{a_i\}$ mit a_i disjunkt. Damit:

$\lambda(\Omega) = \lambda(\{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\{a_i\}) = 0$ (Additivität)
siehe A6

$\Rightarrow \Omega$ jordansche Nullmenge

II Ω abzählbar unendlich Betrachte den Rand:

$\partial\Omega = \{v \in \Omega \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists v_1, v_2 \in B_\varepsilon(v) : v_1 \notin \Omega, v_2 \in \Omega\}$

Sei $v \in \mathring{\Omega}$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegen zwischen v und $v+\varepsilon$

überabzählbar unendlich viele Punkte (da $\Omega \subset \mathbb{R}^2$), Widerspruch

zu Ω abzählbar $\Rightarrow \Omega = \partial\Omega$ und $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

Ω ist entweder nicht jordanmessbar oder es gilt: (14.2.2 vi):

$\lambda(\Omega) = \lambda(\mathring{\Omega}) = \lambda(\bar{\Omega})$ und damit $\lambda(\Omega) = \lambda(\mathring{\Omega}) = 0$,

also Ω jordansche Nullmenge