16.1.3.

Aufgabe 5: Betrachten Sie die Funktion

$$f: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ vermöge } f(x) = 1 \text{ auf } [0,1]$$

Ermitteln Sie die Youngsche Unter- und Obersumme für eine selbstgewählte Zerlegung $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ von $\Omega = [0,1]$ in disjunkte Lebesguemessbare Mengen Ω_k, $k = 1,2,3$.

Zerlege $[0,1]$ in paarw. disj. Lebesguemessbare Teilmengen:

$\Omega_1 = [0, 0{,}3]$, $\Omega_2 = (0{,}3, 0{,}6)$, $\Omega_3 = [0{,}6, 1]$

* Nach 14.3. ist $\ell_n^*(\Omega) = \inf\{\sum_{k\geq 1} |Q_k| : \Omega \subseteq \bigcup_{k=1} Q_k,\ Q_k \in \mathbb{R}^n \text{ beschr. off. Quader}\}$

Für $\ell_1^*([a,b])$ ist die "kleinstmögliche" Überdeckung d. Intervalls das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ selbst. $\Rightarrow \boxed{\ell_1^*([a,b]) = |Q| = b-a}$

Für $\ell_1^*((a,b))$ ist die "kleinstmögliche Überdeckung d. Intervalls ebenfalls $[a,b]$ $\Rightarrow \boxed{\ell_1^*((a,b)) = |Q| = b-a}$

Bilde Youngsche Untersumme:

$$\sum_{k=1}^{3} \inf_{x\in\Omega_k} f(x)\, \ell_1^*(\Omega_k) = \inf_{x\in\Omega_1} \underbrace{f(x)}_{1}\, \ell_1^*([0,0{,}3]) + \inf_{x\in\Omega_2} \underbrace{f(x)}_{1} \cdot \ell_1^*((0{,}3,0{,}6)) + \inf_{x\in\Omega_3} \underbrace{f(x)}_{1}\, \ell_1^*([0{,}6,1])$$

$$\overset{*}{=} \inf_{x\in\Omega_1} (0{,}3-0) + \inf_{x\in\Omega_2} (0{,}6-0{,}3) + \inf_{x\in\Omega_3} (1-0{,}6)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

Obersumme Analog: $\sum_{k=1}^{3} \sup_{x\in\Omega_k} f(x)\, \ell_1^*(\Omega_k) = \underline{\underline{1}}$