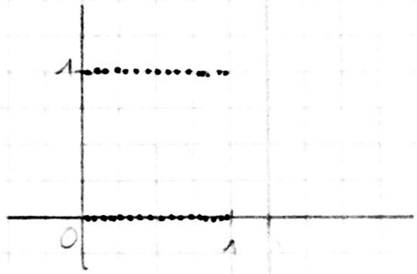
16.1.1 Lebesgues Zugang durch Unterteilung der Ordinaten

Aufgabe 6

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Omega_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\Omega_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$



Youngsche Untersumme:

$$\sum_{k=1}^{2} \inf_{x \in \Omega_k} f(x)\, l_1^*(\Omega_k)$$

$$= \inf_{x \in \Omega_1} f(x) \cdot l_1^*(\Omega_1) + \inf_{x \in \Omega_2} f(x) \cdot l_1^*(\Omega_2)$$

$$= 1 \cdot l_1^*(\Omega_1) + 0 \cdot l_1^*(\Omega_2)$$

$$= l_1^*(\Omega_1) = l_1^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

Youngsche Obersumme

$$\sum_{k=1}^{2} \sup_{x \in \Omega_k} f(x)\, l_1^*(\Omega_k)$$

$$= \sup_{x \in \Omega_1} f(x)\, l_1^*(\Omega_1) + \sup_{x \in \Omega_2} f(x)\, l_1^*(\Omega_2)$$

$$= 1 \cdot l_1^*(\Omega_1) + 0 \cdot l_1^*(\Omega_2)$$

$$= l_1^*(\Omega_1) = l_1^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

$\Rightarrow$ Obersumme ist gleich der Untersumme, also ist $f(x)$ Lebesgue integrierbar