Ana 3 19.2.4 Aufgabe 14

Jessica Schilling
Florian Weinheimer
Lea Reinheimer

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen $f_i \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ harmonisch in $\mathbb{R}^3$ sind.

(i) $f_1(x,y,z) = x^3 - 3xy^2$

Bew: Prüfe ob $\Delta f(x) = \text{div grad} f(x) = 0$:

NR: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} = 6x$

$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 y} = -6x$

$\frac{\partial f(x)}{\partial^2 z} = 0$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 z} = 0$

$\Rightarrow \Delta f(x) = \text{div grad} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 z}$

$= 6x - 6x + 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow f_1(x,y,z)$ ist harmonisch $\square$

(ii) $f_2(x,y,z) = e^x \sin y + x^2 - y^2$

Bew: Prüfe ob $\Delta f(x) = 0$:

NR: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = e^x \sin y + 2x$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} = e^x \sin y + 2$

$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = e^x \cos y - 2y$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 y} = -e^x \sin y - 2$

$\frac{\partial f(x)}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 z} = 0$

$\Rightarrow \Delta f(x) = \text{div grad} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 z}$

$= e^x \sin y + 2 - e^x \sin y - 2 + 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow f_2(x,y,z)$ ist harmonisch $\square$