Daniel Kuller,
Matea Rakov

Gruppe 3: Abgabe 2

10.01.21

19.1 Klassische Differentialoperatoren

Aufgabe 15:

Wie müssen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gewählt sein, damit die Fkt

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad , (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

harmonisch in $\mathbb{R}^2$ ist?

Lösung:

aus der Vorlesung wissen wir:

Eine Funktion f, die der Laplacegleichung $\Delta f(x) = 0$ (in Ω) genügt heißt harmonisch.

1) $\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \operatorname{grad} f(x,y) \\
&= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial f(x)}{\partial y} \right) \\
&= (2ax + 2by + 0, 0 + 2bx + 2cy) \\
&= (2ax + 2by, 2bx + 2cy)
\end{aligned}$$

2) divgrad f berechnen (wir wissen: $\text{div } f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$)

$$\text{divgrad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= 2a + 2c$$

3) $\Delta f = \text{divgrad } f = 2a + 2c \overset{!}{=} 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 2(a+c) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = -a$$

Somit müssen $a, b, c \in \mathbb{R}$ wie folgt gewählt werden, damit die Funktion f in $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist:

$\{a, b, c \in \mathbb{R} \mid c = -a\}$.