Analysis LA - Gruppe 1 - Abgabe 5

Philipp Maus
Johannes Bettinger
Lukas Antoine

Aufgabe 5 (15.2)

Stellen sie die Funktion $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ als punktweisen Grenzwert einer monoton wachsenden Folge einfacher Funktionen dar. Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

Lösung: Sei $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ Folge monoton wachsender einfacher Funktionen mit

$\varphi^{(k)}(x) = 1 - \frac{1}{k}$. Es folgt: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(x) = 1 = f(x)$

Also gilt: $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N}$, so. $\forall k \geq K: |\varphi^{(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \varphi^{(k)}$ konvergiert punktweise gegen f

Außerdem gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup |\varphi^{(k)}(x) - f(x)| = \lim\limits_{k\to\infty} \sup |1 - \frac{1}{k} - 1| = \lim\limits_{k\to\infty} \sup |\frac{1}{k}| = 0$

Damit ist die Konvergenz sogar gleichmäßig $\square$