Philipp Kötz, Julian Lang & Dominik Lescher

20.1.6 Aufgabe 8 - Übung 2

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$,

sowie $f(x,y) = \frac{1}{2}(xy, 0)$

Zu verifizieren:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f(x,y))\, dl_2(x,y) = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt$$

mit passender Parametrisierung $\gamma(t)$ und $\gamma([a,b]) = \partial\Omega$

Sei dazu $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\dot\gamma(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t)} = 1$$

$$N(t) = \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}\cdot\begin{pmatrix}\dot\gamma_2(t)\\ -\dot\gamma_1(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(f(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}xy\right) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = \tfrac{1}{2}y$$

Zunächst die rechte Seite:

$$\int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\cos^2(t)\sin(t)\, dt = \underline{\underline{0}}$$

Nun zur linken Seite:

Dazu sei $\Theta = \{(r,\varphi) \in [0,1) \times [0, 2\pi)\}$,

$\psi : \Theta \to \Omega$, $(r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)$ C^1-Diffeomorphismus

mit Funktionaldeterminante $|\det \partial\psi| = r$

$$\Rightarrow \int_\Omega \tfrac{1}{2} y\, dl_2(x,y) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_\Theta \tfrac{1}{2} r\cdot\sin(\varphi)\cdot r\, dl_2(r,\varphi) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \sin(\varphi)\, d\varphi\, dr$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)\, d\varphi}_{=0}\, dr = \underline{\underline{0}}$$