Adina Reichert
Zeki Aydin
Anna Zoch

Es seien Ω und $\partial\Omega$ wie im Gaußschen Divergenzsatz gewählt. γ ist eine Parametrisierung von $\partial\Omega$.

(i) Zeigen Sie die Gültigkeit der Keplerschen Flächenformel

$$l_2(\Omega) = 1/2 \int_\gamma (x\,dy - y\,dx).$$

Bew.: Wähle $f(x,y) = (1/2x, 1/2y)$, da $\operatorname{div} f(x,y) = 1/2 + 1/2 = 1$

$$l_2(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dl_2(x,y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, dl_2(x,y)$$

gaußsche Integralsatz

$$\overset{\text{}}{=} \int_{\partial\Omega} \{f_1(x,y)\,dy - f_2(x,y)\,dx\}$$

$$= \int_\gamma \{1/2\,x\,dy - 1/2\,y\,dx\}$$

$$= 1/2 \int_\gamma \{x\,dy - y\,dx\} \qquad \square$$

(ii) Berechnen Sie den Inhalt der elliptischen Fläche

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \text{ mit } 0 < a < b < \infty.$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \text{ mit } 0 < a < b < \infty.$$

$\gamma(t) = (a\cdot\cos(t), b\cdot\sin(t))$ ist eine reguläre Parametrisierung für $\partial\Omega$. $\quad t \in [0, 2\pi)$

$\dot\gamma(t) = (-a\cdot\sin(t), b\cdot\cos(t))$

aus (i): $l_2(\Omega) = 1/2 \int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$

$$\Rightarrow l_2(\Omega) = 1/2 \int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

$$= 1/2 \int_0^{2\pi} a\cdot\cos(t)\cdot b\cdot\cos(t) + a\sin(t)\cdot b\sin(t)\,dt$$

$$= 1/2 \int_0^{2\pi} ab\,(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1})\,dt$$

$$= 1/2\, ab \int_0^{2\pi} 1\,dt = 1/2\, ab\, 2\pi = ab\pi$$