Aufgabe 01-0: 001-025
Aufgabe 01-1: 026-050
Aufgabe 02-0: 001-15; 031-040
Aufgabe 02-1: 016-030; 041-050
Aufgabe 03-0: 001-010; 021-030; 041-050
Aufgabe 03-1: 011-020; 031-040;
Aufgabe 04-0: 001-025
Aufgabe 04-1: 026-050
Aufgabe 05-0: 001-015; 031-050
Aufgabe 05-1: 016-030
Aufgabe 06-0: 001-020; 041-050
Aufgabe 06-1: 021-040
Aufgabe 07-0: 001-025
Aufgabe 07-1: 026-050
Aufgabe 08-0: alle

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 3,\ x\le y\le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x\le 3,\ x\le y\le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\, x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\}, \{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{0\}, \{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln
$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral
$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$
unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral
$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$
unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\}, \{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k \sin(x)} \, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1 \, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2} \, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\}, \{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral
$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$
unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral
$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$
unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral
$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$
unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral
$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$
unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge
$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$
Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral
$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$
unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral
$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$
unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x - 3y + 1, -3x - 2y - 3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x - 3y + 1, -3x - 2y - 3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t - 1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3,\; x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x - 3y + 1, -3x - 2y - 3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t - 1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{0\},\{2\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(ii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (2x-3y+1, -3x-2y-3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,3)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (t, 2t-1), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\}, \{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ 2, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a, b]$, $(a, b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k \to \infty} \int_{(0, \frac{\pi}{2})} e^{-k \cos(x)} \, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1 \, d\ell_2(x, y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 2 \leq x \leq 3, \, x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} \, d\ell_2(x, y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten (r, φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial \Phi(r, \varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C\,:\,\gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,:\, x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,:\, x^2+y^2 = 4\}\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,:\, x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\}, \{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ 2, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a, b]$, $(a, b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k \to \infty} \int_{(0, \frac{\pi}{2})} e^{-k \cos(x)} \, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1 \, d\ell_2(x, y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, \; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} \, d\ell_2(x, y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten (r, φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r, \varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\}, \{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2+2yz, xy-yz+z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} e^{-k\cos(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x^2 + 2yz, xy - yz + z, xyz^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,2,1)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x + y - 1, 6y + x + 2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t - 1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\}, \{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy - yz + z^2, xy^2 z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y) \, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1 \, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)| \, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y) \rangle \, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N \rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot{\gamma}(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \le \lambda_*(\Omega) \le \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\; x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} .$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.

Aufgaben

Aufgabe 1 *(Inhalt von Mengen)* (6 Punkte)

Wir betrachten die zweipunktige Menge

$$\Omega := \{\{-1\},\{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

(i) Ermitteln Sie den äußeren Jordaninhalt $\lambda^*(\Omega)$, und gewinnen Sie hieraus vermittels der als bekannt vorausgesetzten Abschätzung $0 \leq \lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$ den inneren Jordaninhalt $\lambda_*(\Omega)$.

(iii) Begründen Sie jetzt, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ Jordanmessbar ist. Wie lautet insbesondere $\lambda(\Omega)$?

Bemerkung: Gehen Sie in (i) nach der aus Paragraph 14.2.1 bekannten Definition des äußeren Jordaninhalts vor. Werten Sie insbesondere eine geeignete obere Abschätzung für $\lambda^*(\Omega)$ aus.

Aufgabe 2 *(Lebesguemessbarkeit von Funktionen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[0,2] \subset \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gehen Sie nach der aus Paragraph 15.1.1 bekannten Definition bzw. einer der dazu äquivalenten Charakterisierungen der Lebesguemessbarkeit vor. Die Lebesguemessbarkeit der leeren Menge $\emptyset$ sowie von Intervallen $[a,b]$, $(a,b]$ usw. wird als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3 *(Satz über majorisierte Konvergenz)* (5 Punkte)

Unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz ist der folgende Grenzwert zu ermitteln

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,\pi)} e^{-k\sin(x)}\, d\ell_1(x).$$

Hinweis: Definieren Sie geeignete $f_k(x)$, und skizzieren Sie eventuell. Wie lauten der punktweise Grenzwert $f(x)$ und eine Majorante $g(x)$? Sind die $f_k(x)$ und $f(x)$ Lebesguemessbar (Par. 15.1.2) und $g(x)$ Lebesgueintegrierbar (Par. 16.2.3)?

Aufgabe 4 *(Satz von Fubini)* (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Omega} 1\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq 2x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: An welcher Stelle geht der Satz von Fubini ein? Eine weitere Begründung dessen Anwendbarkeit sowie der zu verwendeten Gleichheit von Lebesgue- und Riemannintegral müssen nicht gegeben werden.

Aufgabe 5 *(Anwendung der Transformationsformel)* (7 Punkte)

Zu berechnen ist das Integral

$$I := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie Ω vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche?

(ii) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\partial\Phi(r,\varphi)|$.

(iii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel. Warum ist diese Formel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Aufgabe 6 *(Divergenz und Rotation)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+2y, xy-yz+z^2, xy^2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(2,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,1)$.

Aufgabe 7 *(Gradientenfelder und Kurvenintegrale)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f(x,y) := (x+y-1, 6y+x+2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Handelt es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld? Begründen Sie, und geben Sie ggf. ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (3,2)$ verbindende, stetig differenzierbare Kurve

$$C : \gamma(t) = (2t-1, t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Definition aus Abschnitt 19.3. Ist das Integral wegunabhängig? Begründen Sie mit wenigen Worten.

Aufgabe 8 *(Der Gaußsche Divergenzsatz in der Ebene)* (8 Punkte)

Verifizieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz in der Ebene für das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y) := (x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie für die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{mit dem Rand} \quad \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Ermitteln Sie zunächst das zweidimensionale Gebietsintegral

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, d\ell_2(x,y).$$

Um welche Menge handelt es sich bei Ω? Gehen Sie ohne Beweis von der bekannten Identität aus

$$\int_{B_R} 1\, d\ell_2(x,y) = \pi R^2 \quad \text{mit} \quad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

(ii) Ermitteln Sie nun das Randintegral im Gaußschen Divergenzsatz

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), N(t)\rangle |\dot\gamma(t)|\, dt \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \int_{\partial\Omega} \langle f(x,y), N(x,y)\rangle\, ds$$

für eine geeignete Parametrisierung γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Randkurve $\partial\Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ (nutzen Sie z.B. Polarkoordinaten). Bestimmen Sie dazu den äußeren Einheitsnormalenvektor N an $\partial\Omega$. Wie lautet das Skalarprodukt $\langle f, N\rangle$ entlang $\partial\Omega$? Auf welches Integral vereinfacht sich das Randintegral?

(iii) Verifizieren Sie nun den Gaußschen Divergenzsatz.